

Абсолютная устойчивость явных разностных схем для уравнения теплопроводности при регуляризации по Фурье–Тихонову

М.Л. Бахмутский

Ссылка для цитирования

Бахмутский М.Л. Абсолютная устойчивость явных разностных схем для уравнения теплопроводности при регуляризации по Фурье–Тихонову // Программные продукты и системы. 2023. Т. 36. № 2. С. 272–280. doi: 10.15827/0236-235X.142.272-280

Информация о статье

Поступила в редакцию: 30.11.2022

После доработки: 28.12.2022

Принята к публикации: 19.01.2023

Аннотация. В статье рассматривается возможность построения простой и абсолютно устойчивой явной разностной схемы для уравнения теплопроводности. Явные схемы для уравнения теплопроводности были фактически вытеснены из практики программирования абсолютно устойчивыми неявными схемами. Однако неявные схемы плохо распараллеливаются, поэтому программы для решения задач теплопроводности, диффузии, подземной гидродинамики и т. п. на громадных пространственных сетках с использованием многопроцессорных вычислительных систем требуют использования явных разностных схем. Это особенно справедливо для многопроцессорных систем терафлопной и выше производительности, объединяющих сотни процессоров. При этом явные схемы должны быть абсолютно устойчивыми или, по крайней мере, их условие устойчивости должно быть не жестче такого же для гиперболических уравнений. В работе предложены модификации явных разностных схем, аппроксимирующих параболическое уравнение и обладающих свойством абсолютной счетной устойчивости. Счетная устойчивость решения, получаемого на каждом временном шаге классической явной схемой, достигается быстрым преобразованием Фурье и последующим синтезом Фурье с регуляризацией по А.Н. Тихонову. При вычислении прямого и обратного преобразований Фурье использован алгоритм Кули–Тьюки быстрого преобразования Фурье. Приведены результаты сопоставления численных расчетов модельных задач с аналитическими решениями. Абсолютная устойчивость предлагаемых явных схем для уравнения теплопроводности позволяет широко использовать их для параллельных вычислений.

Ключевые слова: явные схемы, уравнение теплопроводности, регуляризация, преобразования Фурье

Благодарности. Исследование выполнено в рамках госзадания ФНЦ НИИСИ РАН «Проведение фундаментальных научных исследований (47 ГП)» по теме № FNEF-2022-0019, рег. № 1021060909165-8-1.2.1

При моделировании пластовых систем приходится решать параболические уравнения, используя громадные пространственные сетки, и рассматривать процессы, протекающие длительное время. Решение таких задач требует применения параллельных вычислений. Однако абсолютно устойчивые неявные схемы плохо распараллеливаются. В то же время условия устойчивости для явных схем налагают слишком жесткие ограничения на временной шаг интегрирования.

Известные абсолютно устойчивые схемы фактически аппроксимируют только гиперболическое уравнение, а параболическое уравнение аппроксимируют при $\tau/h \rightarrow 0$, то есть при выполнении почти столь же жесткого условия, как и для классической явной схемы В.К. Саульева и Дюффорга–Франкела [1, 2]. Существуют абсолютно устойчивые схемы со счетом по явным формулам, называемые «классики» [3, 4]. В работе [3] доказывается сходимость метода с первым порядком в предположении $\tau/h^2 = \text{const}$. Таким образом, абсолютно устойчивые схемы Саульева, Дюффорга–

Франкела и «классики» аппроксимируют уравнение теплопроводности и сходятся при выполнении почти столь же жестких условий, как и для классической явной схемы [5–7]. Обобщить закон Фурье, добавив производную потока по времени, умноженную на малый параметр, предлагается в [8]. При этом уравнение теплопроводности становится сингулярно возмущенным гиперболическим уравнением, а условие устойчивости явной схемы для него менее жестким. В работе [9] приведены оценки разности решений задач для параболического и гиперболического уравнений с малым параметром. В [10] предложен алгоритм повышения устойчивости явных схем путем адаптивного сглаживания при помощи спектрально-сингулярного анализа. Однако в данном случае на каждом временном шаге необходимо находить сингулярное разложение траекторной матрицы решения, что может существенно замедлять вычисления. Поэтому при создании программ для многопроцессорных (многоядерных) систем желательно иметь явные схемы, аппроксимирующие уравнение теплопроводности и

обладающие абсолютной устойчивостью. Счет по таким схемам не должен быть существенно медленнее счета по простым неявным схемам.

В данной работе для достижения безусловной устойчивости счета предлагается использовать регуляризацию решения, полученного на каждом временном шаге по классической явной разностной схеме, при помощи алгоритма Кули–Тьюки быстрого преобразования Фурье [11, 12]. При этом трудоемкость предлагаемых алгоритмов благодаря алгоритму Кули–Тьюки примерно равна трудоемкости метода прогонки.

Описание метода. Задача Дирихле

Рассмотрим начально-краевую задачу для простейшего уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, 1], \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x). \tag{1}$$

Ее аналитическое решение:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\pi^2 k^2 t} \sin(\pi k x),$$

где $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(\pi k x)$.

Введем равномерную пространственную сетку $\{x_i\}_{i=0}^N$ с шагом $h = 1/N$, содержащую $N + 1$ узел.

Аппроксимируем уравнение (1) на этой сетке в виде

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad i \in [1 \div N - 1],$$

$$u_0 = u_N = 0, \quad u_i(0) = f(x_i),$$

и запишем решение этой задачи:

$$u(x_i, t) = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{c}_k e^{-\mu_k^2 t} \sin(\pi k x_i),$$

$$x_i = ih, \quad i \in 0 \div N,$$

$$\mu_k^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right),$$

$$\tilde{c}_k = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \sin(\pi k x_i).$$

Пусть $\frac{\pi k}{2N} \ll 1$, тогда $\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right) \approx \frac{\pi k}{2N}$ и

$\mu_k^2 \approx \frac{4}{h^2} \frac{\pi^2 k^2}{4N^2} \approx \pi^2 k^2$, то есть только первые собственные элементы разностной аппроксимации аппроксимируют дифференциальный оператор и поэтому необходимо правильно рассчитывать эволюцию во времени только

нескольких первых низкочастотных компонент и подавлять рост высокочастотных. Это обстоятельство, вероятно, впервые отмечено в [13]. Решением задачи (1) является ряд Фурье, и, согласно А.Н. Тихонову [14, 15], для получения устойчивого решения задачи суммирования ряда Фурье следует заменить исходный ряд на регуляризованный:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r(k, \alpha) e^{-\pi^2 k^2 t} \sin(\pi k x),$$

где $r(k, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha \pi^2 k^2}$; α – параметр регуляризации. Легко заметить, что устойчивое суммирование ряда Фурье по Тихонову сводится к подавлению высших гармоник с ростом их номера.

Рассмотрим с этой точки зрения две классические разностные схемы для задачи (1) первого порядка аппроксимации по τ и h : условно устойчивую явную схему

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{2}$$

и абсолютно устойчивую неявную схему

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}), \tag{3}$$

а также абсолютно устойчивую схему Кранка–Николсон (схему с весами) второго порядка аппроксимации по τ и h :

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \frac{\tau}{2h^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + \\ + \frac{\tau}{2h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n). \tag{4}$$

В момент времени $t = n\tau$ полагаем

$$u_i^n = \sum_{k=1}^{N-1} a_k^n \sin\left(\frac{\pi k i}{N}\right).$$

Тогда $u_i^{n+1} = \sum_{k=1}^{N-1} a_k^{n+1} \sin\left(\frac{\pi k i}{N}\right)$ и для схем

(2)–(4) выполняются следующие соотношения:

$$a_k^{n+1} = \left(1 - 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right) a_k^n, \tag{5}$$

$$a_k^{n+1} = \frac{a_k^n}{1 + 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}, \tag{6}$$

$$a_k^{n+1} = \frac{1 - 2 \frac{\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{1 + 2 \frac{\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right)} a_k^n. \tag{7}$$

Из формулы (5) следует условие устойчивости явной схемы $\tau \leq h^2/2$.

Построим три явные схемы, отличающиеся алгоритмами регуляризации. Предварительно введем обозначения для дискретных прямого и обратного регуляризованного преобразований Фурье:

$$a_k^n = F \{u_i^n\} \equiv \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{i=1}^{N-1} u_i^n \sin\left(\frac{\pi k i}{N}\right), \quad (8)$$

$$u_i^n = F_R^{-1} \{a_k^n\} \equiv \sum_{k=1}^{N-1} a_k^n r_k \sin\left(\frac{\pi k i}{N}\right). \quad (9)$$

Схема 1. Введем параметр $\varepsilon \ll 1$, определяющий качество аппроксимации собственного значения дифференциальной задачи собственным значением разностной.

$$\text{Поскольку } \sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right) \approx \frac{\pi k}{2N} \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi k}{2N}\right)^2 + \dots\right),$$

для устойчивости гармоник с $k \leq k_0$ необходимо выбрать временной шаг интегрирования

$$\tau \leq \frac{h^2}{2 \sin^2\left(\frac{\pi k_0}{2N}\right)}, \text{ где } k_0 \text{ определяется из нера-$$

венства $\left(\frac{\pi k_0}{2N}\right)^2 \leq 6\varepsilon$, то есть

$$k_0 = \left\lfloor \frac{2N}{\pi} \sqrt{6\varepsilon} \right\rfloor. \quad (10)$$

Квадратные скобки в формуле (10) означают целую часть числа.

Для подавления высших гармоник на каждом временном шаге сначала вычисляем промежуточные значения:

$$v_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n).$$

Затем находим дискретное преобразование Фурье: $b_k^{n+1} = F \{v_i^{n+1}\}$ и, используя регуляризующие множители

$$r_k = \begin{cases} 1, & k < k_0, \\ \frac{1}{1 + 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}, & k_0 \leq k \leq N-1, \end{cases}$$

вычисляем решение на $n+1$ -м временном шаге:

$$u_i^{n+1} = F_R^{-1} \{b_k^{n+1}\}.$$

Строго говоря, предложенный алгоритм не делает явную схему абсолютно устойчивой, а только значительно ослабляет условие устойчивости.

Схема 2. На каждом временном шаге строим дискретное преобразование Фурье разностной аппроксимации второй производной:

$$w_i^n = \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad b_k^n = F \{w_i^n\},$$

вычисляем регуляризованную вторую производную $v_i^n = F_R^{-1} \{b_k^n\}$ с регуляризующими мно-

$$\text{жителями } r_k = \frac{1}{1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right)} \text{ и в итоге нахо-$$

дим решение на $n+1$ -м временном слое:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + v_i^n. \quad (11)$$

Данный алгоритм является явным, эквивалентным неявной схеме и абсолютно устойчивым. Действительно, если положить

$$a_i^n = F \{u_i^n\} \text{ и } a_i^{n+1} = F \{u_i^{n+1}\}, \quad (12)$$

то при непосредственной подстановке (12) в (11) легко убедиться, что результатом алгоритма является соотношение (6).

Схема 3. На каждом временном слое сначала находим промежуточное решение:

$$v_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{2h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \text{ а затем пре-}$$

образование Фурье промежуточного решения:

$$b_k^{n+1} = F \{v_i^{n+1}\}.$$

После этого с помощью обратного регуляризованного преобразования Фурье вычисляем решение $u_i^{n+1} = F_R^{-1} \{b_k^{n+1}\}$ на $n+1$ -м

временном слое. В данном случае регуляризующие множители определяются по формуле

$$r_k = \frac{1}{1 + 2 \frac{\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при $a_k^n = F \{u_i^n\}$ и $a_k^{n+1} = F \{u_i^{n+1}\}$ из алгоритма сле-

$$\text{дует соотношение } a_k^{n+1} = \frac{1 - 2 \frac{\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{1 + 2 \frac{\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right)} a_k^n,$$

совпадающее с соотношением (7).

Алгоритм явной схемы является явным, абсолютно устойчивым и, хотя промежуточное решение не аппроксимирует исходное уравнение, эквивалентным схеме Кранка–Николсон.

Пример расчета. Задача Дирихле. Рассмотрим модельный пример задачи Дирихле:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right),$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Задача имеет аналитическое решение:

$$u(x, t) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 t}\right] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

На рисунке 1а приведены графики аналитического $u(x)$ и численного u_i решений (основ-

ная вертикальная ось) и график относительной ошибки $\delta = \dots$ в % (вспомогательная ось). Для расчета u_i используется схема 3, временной шаг интегрирования в 10^5 раз превосходит максимальный шаг, определяемый из классического условия устойчивости явной схемы, число пространственных узлов $N = 256$, временных шагов 130.

В данном случае аналитическое и численное решения практически совпадают.

На рисунке 1б приведены графики аналитического и численного решений (основная вертикальная ось) и график относительной ошибки в % (вспомогательная ось). Для счета использована схема 3, временной шаг интегрирования в 10^7 раз превосходит максимальный шаг, вытекающий из классического условия устойчивости явной схемы. В этом примере число пространственных узлов $N = 256$, временных шагов 130. Графики аналитического и численного решений резко отличаются, относительная ошибка везде составляет порядка 50 %.

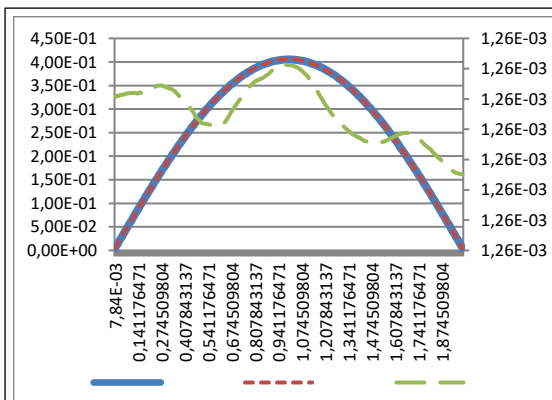
На рисунке 1 представлены результаты численно устойчивого счета, однако разностная схема с временным шагом в $10^7 * h^2/2$ плохо аппроксимирует дифференциальную задачу. В таблицах 1–3 приведены некоторые результаты сравнения численного и аналитического решений для схем 1–3. Для сравнения найдем максимальную относительную ошибку на сетке в момент T (в %):

$$\delta = \max \frac{|u(x_i, T) - u_i^h|}{u(x_i, T)} 100, i \in 0, \dots, N, \quad (13)$$

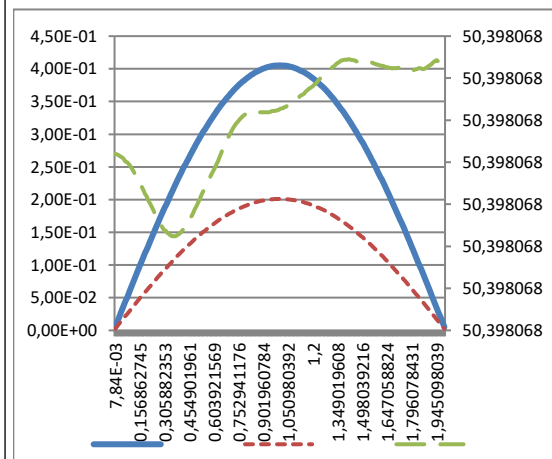
здесь $u(x_i, T)$ – аналитическое, а u_i^h – численное решение в момент времени T в точке x_i . В таблице 1 приведены результаты счета по схеме 1. Здесь $l = 2$, N – размерность пространственной сетки, τ/τ_0 – отношение шага интегрирования по времени к максимальному временному шагу, допускаемому условием устойчивости, n_{step} – количество выполненных временных шагов. В таблице 2 отражены некоторые результаты счета по схеме 2 при $N = 256$, в таблице 3 – результаты счета по схеме 3 при $N = 256$, $n_{step} = 130$.

Приведенные в таблицах примеры демонстрируют абсолютную устойчивость явных разностных схем 2 и 3 и значительное ослабление условия устойчивости для схемы 1.

Модификация метода для задачи Неймана. Рассмотрим решение краевой задачи с однородными условиями Неймана на границах $x = 0$ и $x = 1$. В этом случае можно использовать



а)



б)

Рис. 1. Аналитическое и численное решения и относительная ошибка в %, где временной шаг интегрирования превосходит максимальный: а) в 10^5 , б) в 10^7

Fig. 1. An analytical, numerical solution and a relative error in %, where an integration time step exceeds maximum: а) at 10^5 , б) at 10^7

построенные выше схемы, в которых достаточно заменить синус-преобразование Фурье на косинус-преобразование Фурье с теми же регуляризирующими множителями. Несколько более сложная ситуация возникает, если на одном конце, например, при $x = 0$, задано условие Дирихле, а при $x = 1$ – условие Неймана. Вместо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$x \in [0, 1], u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, u(x, 0) = f(x).$$

Ее аналитическое решение:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-\pi^2(k+1/2)^2 t} \sin(\pi(k+1/2)x),$$

Таблица 1

Результаты счета по схеме 1

Table 1

Calculation results according to scheme 1

N	ε	k_0	τ/τ_0	n_{step}	δ
256	0.01	28	34.214	1 900	1.8016
256	0.001	8	415.345	156	5.734144*
256	0.0001	2	6640.518	979	1.36107*10 ⁻³
4096	0.01	451	33.765	496	4.956*10 ⁻⁴
4096	0.001	142	337.546	49	4.955*10 ⁻³
4096	0.0001	45	3358.136	4 993	1.771*10 ⁻³
4096	0.00001	14	34691.913	483	1.8202*10 ⁻²

Таблица 2

Результаты счета по схеме 2 ($N = 256$)

Table 2

Calculation results according to scheme 2 ($N = 256$)

τ/τ_0	500	1 000	5 000	50 000	500 000	5 000 000
n_{step}	156	156	156	130	130	130
δ	2.99*10 ⁻²	8.79*10 ⁻⁴	1.26*10 ⁻³	1.26*10 ⁻³	1.26*10 ⁻³	1.26*10 ⁻³

Таблица 3

Результаты счета по схеме 3 ($N = 256, n_{step} = 130$)

Table 3

Calculation results according to scheme 3 ($N = 256, n_{step} = 130$)

τ/τ_0	10 ³	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷
δ	1.288605*10 ⁻³	1.264857*10 ⁻³	0.104299	50.398068

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(\pi(k+1/2)x).$$

Схемы 1–3 можно применить, если использовать дискретное преобразование Фурье по функциям $\sin\left(\frac{\pi(k+1/2)}{N}i\right)$. При этом, однако,

неудобно применять алгоритм Кули–Тьюки быстрого преобразования Фурье. Гораздо удобнее симметричным образом продолжить решение и свести задачу к задаче Дирихле на отрезке удвоенной длины. В этом случае изменения в схеме 1 коснутся дискретного преобразования Фурье (8), (9), которое примет вид

$$a_k^n = \Phi\{u_i^n\} \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{2N-1} u_i^n \sin\left(\frac{\pi ki}{2N}\right),$$

$$u_i^{n+1} = \Phi_R^{-1}\{a_k^n\} \equiv \sum_{k=1}^{2N-1} a_k^n r_k \sin\left(\frac{\pi ki}{2N}\right).$$

Для нахождения решения на каждом $n+1$ -м временном слое сначала вычисляем промежуточное решение на сетке из $2N$ узлов:

$$v_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n),$$

$$v_{N+i}^{n+1} = v_{N+i-1}^{n+1}, \quad i \in 1 \div N.$$

Далее при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье находим дискретное преобразование Фурье $b_k^{n+1} = \Phi\{v_i^{n+1}\}$ и, используя регуляризирующие множители

$$r_k = \begin{cases} 1, & k < k_0, \\ \frac{1}{1 + 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{4N}\right)}, & k_0 \leq k \leq 2N-1, \end{cases} \text{ вычисляем}$$

$u_i^{n+1} = \Phi_R^{-1}\{b_k^{n+1}\}$, где i принимает значение от 1 до N . Значение k_0 определяется формулой (10).

Граничное условие $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $x = 1$ выполняется на каждом временном слое, так как $u_{N+1}^{n+1} = u_N^{n+1}$.

Схемы 2 и 3 модифицируются аналогичным образом.

Пример расчета. Рассмотрим модельный

пример: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right), \quad u(0, t) = 0,$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, u(x, 0) = 0.$$

Эта задача имеет аналитическое решение:

$$u(x, t) = \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 t} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right).$$

На рисунке 2 приведены графики аналитического и численного решений этой задачи (основная вертикальная ось) и график относительной ошибки в % (вспомогательная ось). Для счета также использована схема 3, временной шаг интегрирования в 10^5 раз превосходит максимальный шаг, вытекающий из условия устойчивости явной схемы. В этом примере 256 пространственных узлов и 156 временных шагов. Графики аналитического и численного решений практически сливаются.

Некоторые результаты счета этой задачи по схеме 1 приведены в таблице 4, по схеме 2 – в таблице 5, по схеме 3 – в таблице 6. Число пространственных узлов $N = 256$, временных шагов 156.

Упрощение регуляризации. Данные, приведенные в таблицах 1–6, свидетельствуют об устойчивости счета по схемам 1–3. Заменой пространственных переменных реальная задача может быть сведена к приведенным схемам. Для многих квазилинейных уравнений эти замены необходимо делать на каждом вре-

менном шаге и при этом пересчитывать регуляризирующие множители. Для упрощения процедуры пересчета воспользуемся тем, что $\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right) \leq \left(\frac{\pi k}{2N}\right)$ и экстраполяция для всех k со-

отношения $\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right) \approx \frac{\pi k}{2N}$, справедливого при $\frac{\pi k}{2N} \ll 1$, приведет к более сильному подавлению

высших гармоник разложения Фурье. Поэтому вместо регуляризирующего множителя

$$r_k = \frac{1}{1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right)} \text{ полагаем } r_k = \frac{1}{1 + \frac{4\tau \pi^2 k^2}{h^2 4N^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{l^2} \pi^2 k^2}.$$

Таким образом, используем регуляризирующий множитель Тихонова с параметром регуляризации $\alpha = \frac{\tau}{l^2}$, где $l = h \cdot N$ – длина интервала.

Пример расчета приведен в таблицах (<http://www.swsys.ru/uploaded/image/2023-2/2023-2-dop/12.jpg>), где сравниваются численное и аналитическое решения при использовании последних регуляризирующих множителей.

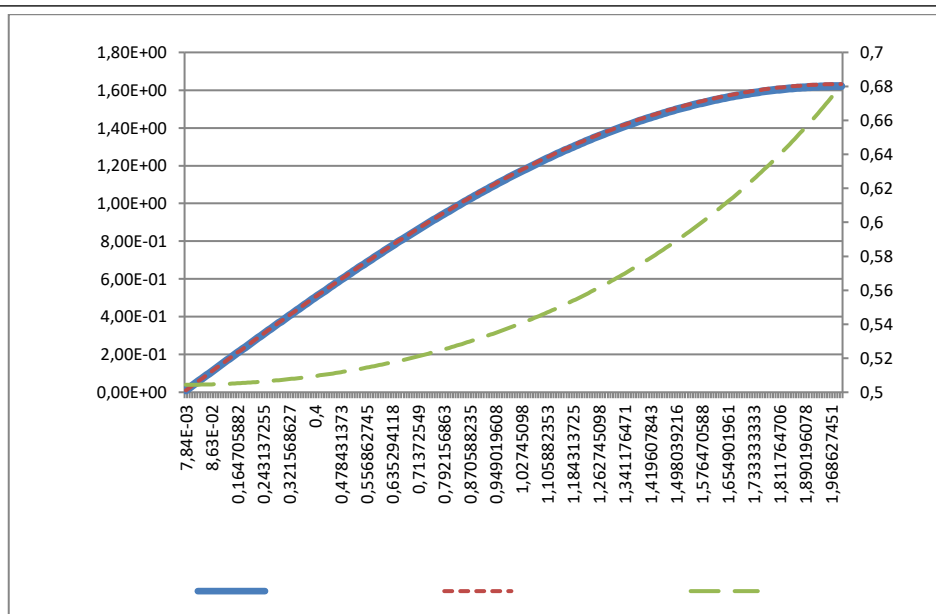


Рис. 2. Аналитическое и численное решения модельного примера и график относительной ошибки в %

Fig. 2. Analytical and numerical solutions of the model example (main vertical axis)

Таблица 4

Результаты счета модельной задачи по схеме 1

Table 4

Calculation results of the model problem according to scheme 1

ε	k_0	τ/τ_0	n_{step}	δ_{max} (%)
0.01	28	34.214	156	0.1024
0.01	28	34.214	15 600	0.48397
0.01	28	34.214	1 560 000	0.48412
0.001	8	415.3451	156	0.4824
0.001	8	415.3451	15 600	0.48418
0.0001	2	6 640.519	156	0.48733

Таблица 5

Результаты счета модельной задачи по схеме 2

Table 5

Calculation results of the model problem according to scheme 2

τ/τ_0	1 000	5 000	50 000	500 000	5 000 000
δ_{max} (%)	0.26598	0.48408	0.484120	0.484120	0.484120

Таблица 6

Результаты счета модельной задачи по схеме 3

Table 6

Calculation results of the model problem according to scheme 3

τ/τ_0	415.3451	6 640.519	10^3	10^5	10^6	10^7
δ_{max} (%)	0.37778	0.6805698	0.5847662	0.680596	0.681479	6.276881

Заключение

Результаты счета свидетельствуют об абсолютной устойчивости модифицированных алгоритмов явной разностной схемы. Расхождение между численным и аналитическим решениями крайне незначительное даже при большом числе временных шагов и существенном превышении порогового (по условиям устойчивости классической явной схемы) значения временного шага интегрирования.

Необходимость прямого и регуляризованного обратного быстрого преобразования Фурье на каждом временном шаге делает использование предлагаемых схем примерно настолько же эффективным, как и простых неявных схем в последовательных программах. Однако абсолютная устойчивость этих явных схем для уравнения теплопроводности позволяет широко применять их для параллельных вычислений.

Список литературы

1. Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.: Физматлит, 1960. 320 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
3. Gourlay A.R. Hopscotch: A fast second order partial differential equation solver. IMA J. of Applied Math., 1970, vol. 6, no. 4, pp. 375–390.
4. Gourlay A.R., McGuire G.R. General hopscotch algorithm for the numerical solution of partial differential equation. IMA J. of Applied Math., 1971, vol. 7, no. 2, pp. 216–227.
5. Степанов М.М., Савельев С.К. Численные методы в ракетостроении. СПб, 2019. 211 с.
6. Мазо А.Б. Вычислительная гидродинамика. Ч. 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы. Казань, 2018. 166 с.
7. Аристова Е.Н., Лобанов А.И. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Ч. 2. М.: МФТИ, 2015. 310 с.
8. Глотов В.Ю., Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н. Балансно-характеристические разностные схемы для уравнений параболического типа // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 4. С. 94–106. doi: 10.20948/mm-2020-04-07.
9. Репин С.И., Четверушкин Б.Н. Оценка разности приближенных решений задачи для параболического уравнения и гиперболического уравнения с малым параметром // Докл. Академии наук. 2013. Т. 451. № 3. С. 255–258. doi: 10.7868/S0869565213210056.

10. Бахмутский М.Л. Интегрирование нелинейных параболических уравнений при помощи явных разностных схем с адаптивным сглаживанием // Вестн. кибернетики. 2015. № 4. С. 72–82.
11. Cooley J.W., Tukey J.W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. of Computation*, 1965, vol. 19, no. 2, pp. 297–301.
12. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. NY, Cambridge University Press, 2007, 1256 p.
13. Люстерник Л.А. О разностных аппроксимациях оператора Лапласа // УМН. 1954. Т. 9. № 2. С. 3–55.
14. Тихонов Н.А. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. № 2. С. 268–271.
15. Маслаков М.Л., Егоров В.В. Регуляризация рядов Фурье с приближенными коэффициентами для задачи оценки плотности распределения вероятностей фаз // СибЖВМ. 2022. Т. 25. № 2. С. 157–171. doi: 10.15372/SJNM20220205.

Software & Systems

doi: 10.15827/0236-235X.142.272-280

2023, vol. 36, no. 2, pp. 272–280

**Absolute stability of explicit difference schemes for the heat equation
under Fourier–Tikhonov regularization**

Mikhail L. Bakhmutsky**For citation**

Bakhmutsky, M.L. (2023) ‘Absolute stability of explicit difference schemes for the heat equation under Fourier–Tikhonov regularization’, *Software & Systems*, 36(2), pp. 272–280 (in Russ.). doi: 10.15827/0236-235X.142.272-280

Article info

Received: 30.11.2022

After revision: 28.12.2022

Accepted: 19.01.2023

Abstract. The paper considers the possibility of constructing a simple and absolutely stable explicit difference scheme for the heat equation. Due to the too rigid stability condition, the invention of the sweep method for solving SLAE with three diagonal matrices, and splitting schemes, absolutely stable implicit schemes forced out explicit schemes for the heat equation of programming practice. However, implicit schemes are poorly parallelized. Therefore, programs for solving problems of heat conduction, diffusion, underground hydrodynamics, etc. on huge spatial grids using multiprocessor computing systems require using explicit difference schemes. This is especially true for multiprocessor systems of teraflop and higher performance that combine hundreds of processors. In this case, explicit schemes must be absolutely stable or, in the extreme case, their stability condition must be no more stringent than the same for hyperbolic equations. The paper proposes modifications of explicit difference schemes that approximate a parabolic equation and have absolute countable stability. Countable stability of a solution obtained at each time step by the classical explicit scheme is achieved by the fast Fourier transform and the subsequent Fourier synthesis with Tikhonov regularization. When calculating the direct and inverse Fourier transforms, the author used the Cooley–Tukey algorithm of the fast Fourier transform. There are the results of comparing numerical calculations of model problems with analytical solutions. The absolute stability of the proposed explicit schemes for the heat equation allows their wide use for parallel computations.

Keywords: explicit schemes, heat conduction equation, regularization, Fourier transform

Acknowledgements. The research was made within the framework of the state task of the Federal Scientific Center NIISI RAS “Conducting fundamental scientific research (47 GP)” on topic No. FNEF-2022-0019, reg. No. 1021060909165-8-1.2.1

Reference List

1. Saulev, V.K. (1960) *Integration of Equations of Parabolic Type by the Method of Grids*, Moscow, 320 p. (in Russ.).
2. Roach, P. (1980) *Computational Fluid Dynamics*, Moscow, 616 p. (in Russ.).
3. Gourlay, A.R. (1970) ‘Hopscotch: A fast second order partial differential equation solver’, *IMA J. of Applied Math.*, 6(4), pp. 375–390.

4. Gourlay, A.R., McGuire, G.R. (1971) 'General hopscotch algorithm for the numerical solution of partial differential equation', *IMA J. of Applied Math.*, 7(2), pp. 216–227.
5. Stepanov, M.M., Savelev, S.K. (2019) *Numerical Methods for Rocket Building*, St. Petersburg, 211 p. (in Russ.).
6. Mazo, A.B. (2018) *Computational Fluid Dynamics. P. 1. Mathematical Models, Grids and Grid Schemes*, Kazan, 166 p. (in Russ.).
7. Aristova, E.N., Lobanov, A.I. (2015) *Practical Classes on Computational Math. in MPTI. P. 2*, Moscow, 310 p. (in Russ.).
8. Glotov, V.Yu., Goloviznin, V.M., Chetverushkin, B.N. (2020) 'Balance and characteristic finite difference schemes for equations of the parabolic type', *Math. Models Comput. Simul.*, 12(6), pp. 981–989. doi: 10.1134/S2070048220060095.
9. Repin, S.I., Chetverushkin, B.N. (2013) 'Estimating the difference between approximate solutions of a problem for a parabolic equation and a hyperbolic equation with a small parameter', *Dokl. Math.*, 451(3), pp. 255–258. doi: 10.7868/S0869565213210056 (in Russ.).
10. Bakhmutsky, M.L. (2015) 'Integration nonlinear parabolic equation by explicit finite-difference scheme with adaptive smoothing', *Bull. of Cybernetics*, (4), p.72–82 (in Russ.).
11. Cooley, J.W., Tukey, J.W. (1965) 'An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series', *Math. of Computation*, 19(2), pp. 297–301.
12. Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P. (2007) *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, NY: Cambridge University Press, 1256 p.
13. Lyusternik, L.A. (1956) 'On difference approximations of the Laplace operator', *Russian Math. Surveys*, 9(2), pp. 3–55 (in Russ.).
14. Tikhonov, A.N. (1964) 'On stable summability methods for Fourier series', *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 156(2), pp. 268–271 (in Russ.).
15. Maslakov, M.L., Egorov, V.V. (2022) 'Regularization of Fourier series with approximate coefficients for the problem of phase probability density function estimation', *SJNM*, 25(2), pp. 157–171. doi: 10.15372/SJNM20220205.

Авторы

Бахмутский Михаил Львович¹, к.ф.-м.н., доцент,
старший научный сотрудник,
mbakhmut@mail.ru

¹ Научно-исследовательский институт
системных исследований РАН,
отдел вычислительных систем,
г. Москва, 117218, Россия

Authors

Mikhail L. Bakhmutsky¹, Ph.D. (Physics and
Mathematics), Associate Professor, Senior Researcher,
mbakhmut@mail.ru

¹ Federal State Institution "Scientific Research Institute
for System Analysis of Russian Academy of Sciences",
Computing System Department,
Moscow, 117218, Russian Federation