

УДК 621.373.7
DOI: 10.15827/0236-235X.132.613-618

Дата подачи статьи: 01.06.20
2020. Т. 33. № 4. С. 613–618

Моделирование аттрактора Лоренца

Ф.В. Филиппов¹, к.т.н., доцент, 9000096@mail.ru
А.М. Струев¹, старший преподаватель, stryuev@mail.ru
А.А. Золкин², к.т.н., доцент, alzolkin@list.ru

¹ Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций
им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, кафедра информационных управляющих систем,
г. Санкт-Петербург, 193232, Россия

² Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
кафедра информатики и вычислительной техники,
г. Самара, 443010, Россия

В статье на примере построения аттрактора Лоренца изложен механизм, позволяющий применять систему Scilab при моделировании динамических систем, сохраняя при этом высокую точность полученных данных. Модель Лоренца представляет собой реальный физический пример динамических систем с хаотическим поведением, чем отличается от созданных искусственно.

Удалось установить, что закон, выведенный Лоренцем, имеет исключительную важность, поскольку характеризует процессы как в турбулентных потоках, так и в физике лазеров и гидродинамических систем, в биологии и химии. В работах, посвященных численному исследованию системы Лоренца при классических значениях ее параметров, очень часто делаются заключения о структуре аттрактора на основе данных, полученных из вычислительного эксперимента (например, что аттрактор содержит циклы).

Программа, предложенная авторами к рассмотрению, делится на две основные части. Первая часть регламентирует создание функции пользователя *solv_lor(n)*, характеризующей систему дифференциальных уравнений, моделирующих аттрактор Лоренца. Во второй части листинга содержится вызов этой функции. Дана характеристика изменений в поведении решения системы Лоренца с применением различных значений параметра *r*. Отражены результаты моделирования с применением различных значений параметра *r*. Выявлены значительные изменения траектории при больших значениях параметра.

Программой задана функция пользователя *lorenz(t, y)*, в работе с которой применяются численные способы, используемые для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, система на качественном высоком уровне позволяет осуществлять графическое моделирование решений. Предусмотрен набор графических инструментов для выполнения динамического редактирования графиков и управления параметрами графического окна.

Проведенные компьютерные эксперименты доказали простоту и удобство применения системы Scilab при моделировании динамических систем, сохраняя при этом высокую точность полученных результатов.

Ключевые слова: динамические системы, моделирование, аттрактор Лоренца, программа, параметр, траектория, функция, дифференциальное уравнение, листинг, компьютерные эксперименты.

Аттракторы – это точки либо замкнутые линии, притягивающие к себе самые разнообразные траектории поведения системы. При этом в аттракторе определенная очерченная точкой область, двигающаяся хаотично, создает траекторию, которая, в свою очередь, приводит к созданию фигуры дробной размерности [1]. Характерно, что точка в странном аттракторе выполняет довольно непростые движения, непредсказуемо перескакивая вперед и назад среди двух центров-фокусов.

С течением времени удалось установить, что закон, выведенный Лоренцем, имеет исключительную важность, поскольку характеризует про-

цессы как в турбулентных потоках, так и в физике лазеров и гидродинамических систем, а также в сложных процессах биологии и химии [2].

Аттрактор Лоренца представляет собой лаконичное инвариантное множество *L* в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока, имеющем собственную сложную топологическую структуру и являющемся при этом асимптотически устойчивым. Оно проявляет устойчивость по Ляпунову, а любые траектории из некоторой окрестности *L* стремятся к *L* при $t \rightarrow \infty$ (отсюда и название) [3].

Аттрактор Лоренца был обнаружен при изучении численных экспериментов Лоренца, ко-

торый провел исследование поведения траекторий нелинейной системы:

$$\begin{aligned} x &= \sigma(y - x), \\ y &= x(r - z) - y, \\ z &= xy - bz \end{aligned} \quad (1)$$

при следующих значениях параметров: $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$.

Таким образом, модель Лоренца следует отнести к реальному физическому примеру динамических систем с хаотическим поведением в отличие от прочих моделей, сконструированных искусственно [4].

Постановка математической задачи получения аттрактора Лоренца

Проанализируем изменения, касающиеся поведения решения системы Лоренца при использовании различных значений параметра r . Моделирование осуществлялось с применением авторской программы, написанной в системе Scilab.

Если используется значение $r < 1$, аттрактором является начало координат, другие устойчивые точки отсутствуют.

При использовании значений $1 \geq r < 13,927$ наблюдается спиральное приближение траектории (что пропорционально наличию затухающих колебаний) к двум точкам, положение которых можно определить формулами:

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{b(r-1)}, \\ y &= \pm\sqrt{b(r-1)}, \\ z &= r - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

При использовании значения $r > 13,927$ в случае выхода траектории из начала координат она вернется обратно в начальную точку, сделав полный оборот вокруг одной из устойчивых точек, при этом появляются две гомоклинические петли. Термин «гомоклиническая траектория» предполагает, что она выходит и возвращается в одно и то же положение равновесия.

На рисунке 1 отражены результаты моделирования с использованием различных значений параметра r .

Представим $r \approx 24,06$. В данном случае траектории не приводят к устойчивым точкам, они асимптотически следуют в направлении неустойчивых предельных циклов, в результате чего возникает собственно аттрактор Лоренца. При этом обе устойчивые точки сохраняются вплоть до значений $r \approx 24,74$.

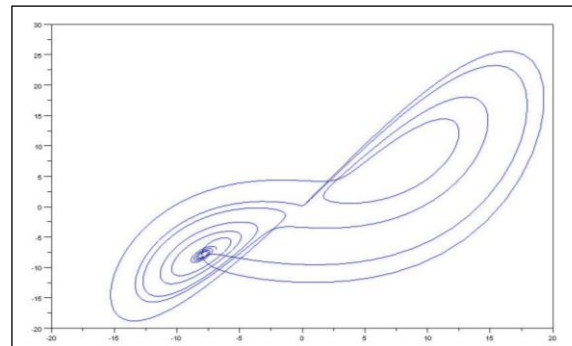


Рис. 1. Траектория аттрактора Лоренца при $r = 24,74$

Fig. 1. Lorentz attraction trajectory at $r = 24,74$

При больших значениях параметра траектория существенно меняется. Шильников и Каплан проиллюстрировали переход системы в режим автоколебаний при очень больших r . Кроме того, если параметр уменьшить, это приведет к хаосу из-за последовательного удвоения периода колебаний [5, 6].

Следует отметить везение Лоренца при выборе значения параметра r , поскольку система приходит к странному аттрактору исключительно в результате применения значений, больших 24,74, а при использовании меньших поведение является абсолютно иным.

Листинг расчета аттрактора Лоренца

Для компьютерного эксперимента авторы разработали следующую программу:

```
// функция пользователя
function [x1, y1, z1, t1] = solv_lor(tnn);
x0 = rand();
y0 = rand();
z0 = rand();
sigma = 10;
b = 8/3;
r = 28;
n = 1 000;
t0 = 0;
tn = tnn;
t = t0:(tn - t0)/(n - 1):tn;
dt = t(2) - t(1);
x = zeros(1, n);
y = zeros(1, n);
z = zeros(1, n);
x(1, 1) = x0;
y(1, 1) = y0;
z(1, 1) = z0;
for i = 2:n,
    x(i) = dt*sigma*(y(i - 1) - x(i - 1)) + x(i - 1);
    y(i) = dt*(r*x(i - 1) - y(i - 1) - x(i - 1)*z(i - 1)) + y(i - 1);
    z(i) = dt*(-b*z(i - 1) + x(i - 1)*y(i - 1)) + z(i - 1);
end
```

```
x1 = x;
y1 = y;
z1 = z;
t1 = t;
endfunction;
// вызов функции пользователя
[x2, y2, z2, t2] = solv_lor(10);
```

Программа образует две основные части. В первой задается функция пользователя *solv_lor(n)*, которая описывает систему дифференциальных уравнений, моделирующих аттрактор Лоренца (рис. 2). Помимо этого, заданы удобные для графического моделирования значения параметров системы [7]. В данном случае *n* определяет геометрические параметры исследуемой задачи.

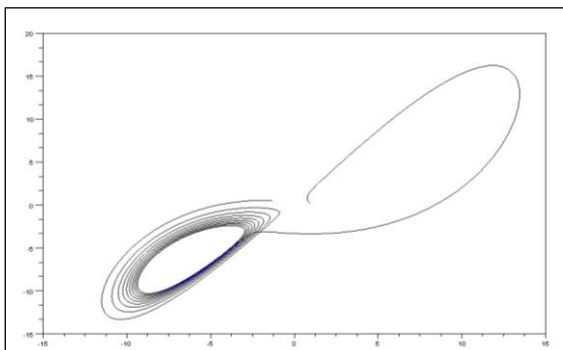


Рис. 2. Траектория аттрактора Лоренца при $r = 16$

Fig. 2. Lorenz attraction trajectory at $r = 16$

Во второй части листинга содержится вызов созданной функции пользователя *solv_lor(n)*.

3D-моделирование аттрактора Лоренца

Для создания пространственного моделирования будет применена следующая программа:

```
// функция пользователя
function ydot = lorenz(t, y)
x = y(1);
a = [-10, 10, 0; 90, -1, -x; 0, x, -8/3];
ydot = a*y
endfunction
function j = jacobian(t, y)
x = y(1);
yy = y(2);
z = y(3);
j = [-10, 10, 0; 28 - z, -1, -x; -yy, x, -8/3]
endfunction
// Интеграция
y0 = [-3; -6; 12];
t0 = 0;
step = 0.01;
t1 = 10;
instants = t0:step:t1;
```

```
y = ode(y0, t0, instants, lorenz, jacobian);
// визуализация + анимация
my_handle = scf(100001);
clf(my_handle, "reset");
demo_viewCode("ode_lorenz.dem.sce");
title_("Lorenz differential equation")
function h = poly3d(x, y, z)
xpoly(x, y); h = gce(); h.data(:, 3) = z
endfunction
curAxe = gca();
drawlater()
curAxe = gca();
curAxe.view = '3d'
curAxe.axes_visible = 'on'
curAxe.data_bounds = [min(y, 'c'); max(y, 'c')]
curAxe.margins(3) = 0.2;
curAxe.title.text = [_("Lorenz differential equation")
"dy1/dt = -10*y1 + 10*y2"
"dy2/dt = 200*y1 - y2 - y1*y3"
"dy3/dt = y1*y2 - 8/3*y3"
]
curAxe.grid = curAxe.hidden_axis_color*ones(1, 3);
curAxe.x_label.text = 'y1'
curAxe.y_label.text = 'y2'
curAxe.z_label.text = 'y3'
//прорисовка
p = poly3d(y(1, 1), y(2, 1), y(3, 1));
drawnow()
// анимация
for k = 1:size(y, 2)
p.data = [p.data; y(1:3, k)];
end;
```

В программе задается функция пользователя *lorenz(t, y)*. При работе с ней используются численные методы решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [8, 9], а также задается геометрия задачи. В процессе построения применяются оформительские функции и процедуры для подписей осей, их масштабирования и фиксации решаемой системы дифференциальных уравнений с использованием четких параметров, исследуемых в настоящем эксперименте (рис. 3).

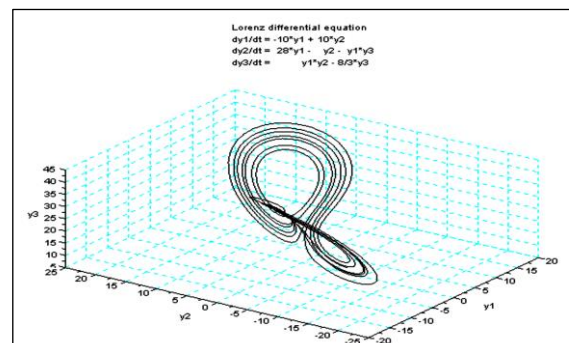


Рис. 3. Траектория аттрактора Лоренца при $r = 28$

Fig. 3. Lorenz attraction trajectory at $r = 28$

Заключение

Таким образом, проведенные компьютерные эксперименты подтвердили простоту и удобство использования системы Scilab при моделировании динамических систем, позволяя при этом сохранять высокую точность по-

лученных результатов [10–12]. Система дает возможность на достаточно высоком качественном уровне осуществлять графическое моделирование решений. Приведен в систему комплекс инструментов, позволяющих выполнять динамическое редактирование графиков и управлять параметрами графического окна.

Литература

1. Рошкетаяев С.А. Моделирование развития локального финансового рынка мегаполиса на основе аттрактора Лоренца // *Финансы и кредит*. 2011. № 41. С. 24–30.
2. Будаев В.П., Савин С.П., Зеленый Л.М. Наблюдения перемежаемости и обобщенного самоподобия в турбулентных пограничных слоях лабораторной и магнитосферной плазмы: на пути к определению количественных характеристик переноса // *Успехи физических наук*. 2011. Т. 181. № 9. С. 905–952.
3. Леонов Г.А. Функции Ляпунова в теории размерности аттракторов // *Прикладная математика и механика*. 2012. Т. 76. № 2. С. 180–196.
4. Höfling F., Franosch T., Frey E. Localization transition of the three-dimensional Lorentz model and continuum percolation. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, no. 16, art. 165901. DOI: 10.1103/physrevlett.96.165901.
5. Сердюков В.И., Сеница Л.Н., Васильченко С.С., Воронин Б.А. Высокочувствительная Фурье-спектроскопия в высокочастотной области с небольшими многоходовыми кюветами // *Оптика атмосферы и океана*. 2013. Т. 26. № 3. С. 240–246.
6. Кузнецов С.П., Купцов П.В. Аттрактор Лоренца в системе с запаздыванием: пример псевдогиперболического хаоса // *Изв. Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. 2018. Т. 18. № 3. С. 162–176. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-3-162-176.
7. Золкин А.Л., Кленюшин Д.С. Сравнительный анализ показателей работы систем ИХ АВГД и КАС АНТ (КАСАТ) в ОАО «РЖД» и пути повышения надежности их работы // *Наука и образование транспорта: XII Междунар. науч.-практич. конф.* Самара: изд-во СамГУПС, 2019. Т. 1. С. 24–29.
8. Тормозов В.С., Золкин А.Л., Василенко К.А. Настройка, обучение и тестирование нейронной сети долгой краткосрочной памяти для задачи распознавания образов // *Промышленные АСУ и контроллеры*. 2020. № 3. С. 52–57. DOI: 10.25791/asu.3.2020.1171.
9. Золкин А.Л. Разработка информационно-управляющей системы для сбора, обработки и передачи данных о техническом состоянии коллекторов электродвигателей // *Научно-технические аспекты инновационного развития транспортного комплекса: V Междунар. науч.-практич. конф.: сб. науч. тр.* Донецк: ДАТ, 2019. С. 48–53.
10. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.
11. Лялин В.Е., Файзуллин Р.В. Интеллектуальная информационная технология для оценки затрат на производство изделий в машиностроении // *Вестн. ВЭГУ: Экономика*. 2008. № 2. С. 54–73.
12. Lavrov E., Barchenko N., Pasko N., Tolbatov A. Development of adaptation technologies to man-operator in distributed E-learning systems. *Proc. 2nd Intern. Conf. on AICT*, 2017, pp. 88–91. DOI: 10.1109/AIACT.2017.8020072.

Lorentz attractor simulation

F.V. Filippov¹, Ph.D. (Engineering), Assistant Professor, 9000096@mail.ru

A.M. Struev¹, Senior Lecturer, struev@mail.ru

A.L. Zolkin², Ph.D. (Engineering), Associate Professor, alzolkin@list.ru

¹ The Bonch-Bruевич Saint-Petersburg State University of Telecommunications, Department of Information Managerial Systems, St. Petersburg, 193232, Russian Federation

² Povolzhskiy State University of Telecommunication and Informatics, Department of Computer Science and Engineering, Samara, 443010, Russian Federation

Abstract. This paper describes the mechanism that allows applying the Scilab system during dynamic systems simulation with kept high accuracy of the obtained data, based on the example of the Lorentz attractor build-up. The Lorentz model is a real physical example of dynamical systems with chaotic behavior, which differs from other created artificial systems.

Over time, it was possible to find out that the law worked out by Lorentz has extreme importance, since it characterizes both processes in turbulent flows and processes in the laser physics and hydrodynamic systems, as well as in complex processes of biology and chemistry. In the literature dedicated to the numerical study of the Lorentz system with classical values of its parameters, conclusions are often made about the structure of the attractor based on data obtained from a computational experiment (for example, the statement that the attractor contains cycles).

The program proposed for consideration by the authors consists of two main parts. The first part regulates the creation of the user function `solv_lor (n)`, which characterizes the system of differential equations that simulates the Lorentz attractor. The second part of the listing contains a call to the created user function `solv_lor (n)`. The paper contains the specific changes in the behavior of the Lorentz system using various values of the r parameter. Graphic illustrations that reflect the results of simulation using various values of the r parameter are also given in the article. Significant changes in the trajectory have for the large values of the parameter been found.

The program sets the user function `Lorentz (t, y)`. The numerical methods have been used in the work with this function in order to solve the system of ordinary differential equations. Moreover, the system allows performing the graphical modeling of solutions at a qualitatively high level. A set of graphical tools is provided for the dynamic editing of graphs and the management of graphic window parameters.

The computer experiments carried out have proved the simplicity and convenience of using the Scilab system for modeling dynamic systems while maintaining the high accuracy of the results obtained.

Keywords: dynamic systems, simulation, Lorentz attractor, program, parameter, trajectory, function, differential equation, listing, computer experiments.

References

1. Roschektaev S.A. Simulation of the local financial market of a megalopolis based on the Lorentz attractor. *Banking and Finance*, 2011, no. 41, pp. 24–30 (in Russ.).
2. Budaev V.P., Savin S.P., Zelenyi L.M. Investigation of intermittency and generalized self-similarity of turbulent boundary layers in laboratory and magnetospheric plasmas: towards a quantitative definition of plasma transport features. *Advances in Physical Sciences*, 2011, vol. 181, no. 9, pp. 905–952 (in Russ.).
3. Leonov G.A. Lyapunov functions in the attractors dimension theory. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 2, pp. 180–196 (in Russ.).
4. Höfling F., Franosch T., Frey E. Localization transition of the three-dimensional Lorentz model and continuum percolation. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, no. 16, art. 165901. DOI: 10.1103/physrevlett.96.165901.
5. Serdyukov V.I., Sinita L.N., Vasilchenko S.S., Voronin B.A. High sensitive Fourier transform spectroscopy with small multipass absorption cell. *Atmospheric and Oceanic Optics*, 2013, vol. 26, no. 3, pp. 240–246 (in Russ.).
6. Kuznetsov S.P., Kuptsov P.V. Lorenz attractor in a system with delay: an example of pseudogyperbolic. *Izv. of Saratov University. New series. Series: Physics*, 2018, vol. 18, no. 3, pp. 162–176. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-3-162-176 (in Russ.).
7. Zolkin A.L., Klenyushin D.S. Comparative analysis of the performance indicators of the "System of the storage of a data of analysis of the compliance with a train traffic schedule" and of the "Integrated automated system for accounting of technical equipment failures, control over their elimination and analysis of their reliability" that are used at the Russian Railways OJSC and ways to improve the reliability of these systems. *Proc. XII Intern. Sc. Pract. Conf.: Science and Education to Transport*. Samara, 2019, vol. 1, 2019, pp. 24–29 (in Russ.).
8. Tormozov V.S., Zolkin A.L., Vasilenko K.A. Configuring, training and testing a long-term short-term memory neural network for pattern recognition. *Industrial ACS and Controllers*, 2020, no. 3, pp. 52–57. DOI: 10.25791/asu.3.2020.1171 (in Russ.).
9. Zolkin A.L. Development of the data management system for collection, processing and transmission of data on the technical condition of electric motor collectors. *Proc. V Intern. Sc. Pract. Conf.: Scientific and Technical Aspects of the Innovative Development of the Transport Complex*. Donetsk, 2019, pp. 48–53 (in Russ.).
10. Gaiduk A.R. *Theory and Methods of Analytical Synthesis of Automatic Control Systems (Polynomial Approach)*. Moscow, 2012, 360 p. (in Russ.).

11. Lyalin V.E., Faizoullin R.V. Intellectual information technology for the evaluation of product manufacture efforts in machine-building. *Vestn. VEGU: Economics*, 2008, no. 2, pp. 54–73 (in Russ.).

12. Lavrov E., Barchenko N., Pasko N., Tolbatov A. Development of adaptation technologies to man-operator in distributed E-learning systems. *Proc. 2nd Intern. Conf. on AICT*, 2017, pp. 88–91. DOI: 10.1109/AIACT.2017.8020072.

Для цитирования

Филиппов Ф.В., Струев А.М., Золкин А.Л. Моделирование аттрактора Лоренца // Программные продукты и системы. 2020. Т. 33. № 4. С. 613–618. DOI: 10.15827/0236-235X.132.613-618.

For citation

Filippov F.V., Struev A.M., Zolkin A.L. Lorentz attractor simulation. *Software & Systems*, 2020, vol. 33, no. 4, pp. 613–618 (in Russ.). DOI: 10.15827/0236-235X.132.613-618.